**ΠΛΗ20 – ΓΕ 2η – 2017/18: Ερωτήματα & απαντήσεις**

1. **Σύνταξη και συντακτικά δένδρα (δενδροδιαγράμματα). (7 + 7 μονάδες)**

*Το ερώτημα* **1.A** *εξετάζει την ικανότητα συντακτικής ανάλυσης ενός προτασιακού τύπου.*

*Το ερώτημα* **1.B** *αποβλέπει στο να δείξει ότι τα συντακτικά δένδρα είναι χρήσιμα και κατά (πολλούς) άλλους τρόπους.*

**συνοδευτικές ασκήσεις παλαιότερων ετών: (Α: θεμα #1), (Β: θεμα #3) .**

**Α.**  Διαγνώστε ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις είναι ορθά συντεταγμένοι προτασιακοί τύποι επί των μεταβλητών  και των συνδέσμων . Για όσες είναι ορθές, σχεδιάστε το δενδρο­διάγραμμά τους. (Tηρείστε τις προτεραιότητες συνδέσμων που εξηγούνται στο βιβλίο σελ. 25-26 ([[1]](#footnote-1)).)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1) | 2) | 3) | 4) |

**1.Α: ενδεικτικεσ απαντησεισ**

**1.Α.1.** Λανθασμένη: περιέχει μία επιπλέον δεξιά παρένθεση.

**1.Α.2.** Λανθασμένη: η προτεραιότητα με την οποία δίνεται νόημα στους συνδέσμους του  δεν είναι καθορισμένη (βλ. θεώρημα μοναδικής αναγνωσιμότητας στη σελ. 24 κ.ε.).

**1.Α.3.** Ορθή – τo δενδροδιάγραμμα δίδεται στη συνέχεια:



**1.Α.4.** Λανθασμένη: το σύμβολο δεν περιέχεται στο σύνολο των διαθέσιμων τελεστών.

**Β.**  Ο προσεταιριστικός νόμος της διάζευξης λέει ότι ο τύπος  είναι αντικαταστήσιμος από τον τύπο , βλ. σχήμα αριστερά. Στο σχήμα δεξιά εικονίζεται με δενδροδιαγράμματα, η εφαρμογή του προσεταιρισμού της διάζευξης σε τύπο με 5 εμφανίσεις μεταβλητών, και συγκεκριμμένα επί των   
(υπο)-τύπων :



Έστω δύο διαζευκτικοί τύποι *Φ* και *Φ΄* με *n* εμφανίσεις , κάποιων προτασιακών μεταβλητών. Δείξατε ότι αν οι μεταβλητές έχουν την ίδια σειρά εμφάνισης, τότε, ανεξαρτήτως της θέσης των παρενθέσεων είναι δυνατόν, με χρήση του κανόνα της προσεταιριστικότητας, να μετασχημα­τίσουμε το έναν τύπο ώστε να προκύψει ο άλλος.

***Υπόδειξη***: χρησιμοποιείστε, προαιρετικά, επαγωγή επί του πλήθους των αριστερών παρενθέ­σε­ων που εμφανίζονται από την αρχή ενός τύπου ως την πρώτη εμφάνιση μεταβλητής.   
Π.χ. στο σχήμα, δεξιά, από τρείς αρχικές παρενθέσεις στο (*i*), αποκτούμε τέσσερεις στο (*ii*).

**1.Β: ενδεικτικη απαντηση**

*Βάση επαγωγής*: Προφανώς κάθε διαζευκτικός τύπος *Φ* έχει τουλάχιστον *k*= 1 αρχικές παρενθέσεις.   
*Βήμα επαγωγής*: Θα δείξουμε ότι εάν ο *Φ* έχει τουλάχιστον *k* αρχικές παρενθέσεις,όπου *k* < (*n*–1), τότε μετασχηματίζεται σε τύπο με τουλάχιστον (*k* +1) αρχικές παρενθέσεις, χωρίς αλλαγή της σειράς εμφάνισης των μεταβλητών. (Άρα επαγωγικά, ο *Φ* μετασχηματίζεται ώστε να έχει ακριβώς *n*–1 αρχικές παρενθέσεις.)

Προσέχουμε ότι ο *Φ* έχει τόσες αρχικές παρενθέσεις όσους κόμβους με διάζευξη έχει ο αριστερός κλάδος *κ* στο δενδροδιάγραμμά του. Έστω ότι έχει *δ* ≥ *k* κόμβους διάζευξης. Αν *δ* = (*n­*–1) τότε ήδη *δ* ≥ (*k* +1) αφού   
(*k* +1) ≤ (*n–*1) = *δ*. Αν *δ* < (*n­*–1) κάποια τις (*n­*–1) διαζεύξεις θα κείται εκτός του κλάδου *κ*, σε κόμβο *y* συνδεδεμένο με κόμβο *x* επί του *κ –* π.χ. η στο σχήμα (*i*). Η εφαρμογή της προσεταιριστι­κό­τητας αντιστοιχεί στη «στροφή» της ακμής που συνδέει τους κόμβους *x* και *y* ώστε να βρεθεί *και* ο *y* επί του *κ,* (βλ. σχήματα), χωρίς αλλαγή της σειράς εμφάνισης των μεταβλητών. Άρα οι αρχικές παρενθέσεις θα γίνουν (*δ* +1), όπου (*δ* +1) ≥ (*k* +1).

Ο *Φ* μετασχηματίζεται λοιπόν ώστε το δενδροδιάγραμμά του *Δ* να έχει όλες τις (*n­*–1) διαζεύξεις *επί του ενός αριστερού κλάδου*, και τις μεταβλητές με την *αρχική σειρά εμφάνισης*. Άρα, παρομοίως, το δενδροδιάγραμμα του *Φ΄* μετασχηματίζεται, στο *ίδιο* δένδρο *Δ*. Αφού οι *Φ* και *Φ΄* μετασχηματί­ζονται στο ίδιο *Δ*, μετασχηματίζονται και ο ένας στον άλλο, ακολουθώντας τους μετασχηματισμούς του *Φ* έως το *Δ*, και τους αντίστροφους μετασχηματισμούς του *Φ΄*, με την αντίστροφη σειρά, από το *Δ* έως τον *Φ΄*.

1. **Σημασία \ «γραφή και ανάγνωση» προτασιακών τύπων. (10 + 10 μονάδες)**

*Το ερώτημα* **2.A** *εξετάζει την ικανότητα* γραφής *διαφόρων λογικών συνθηκών σε μια προτασιακή γλώσσα.*

*Το ερώτημα* **2.B** *εξετάζει το συμμετρικό: την ικανότητα* ανάγνωσης και χρήσης(του νοήματος) *ενός προτασιακού τύπου.*

**συνοδευτικές ασκήσεις παλαιότερων ετών: (Α1, Α2: θεμα #2, #4), (Β1: θεμα #2).**

**Α.**  Ως γνωστόν, στη γλώσσα των συνόλων γράφουμε ως  το σύνολο που έχει ακριβώς όποια στοιχεία έχει το *Α* συν όποια έχει το *Β*· ως  το σύνολο που έχει ακριβώς όποια στοιχεία ανήκουν και στο *Α* και στο *Β*· και ως *Α–Β* το σύνολο που έχει ακριβώς όποια στοιχεία έχει το *Α* αλλά δεν τα έχει το *Β*. Έστω τρείς προτασιακές μεταβλητές που ερμηνεύονται ως «*το στοιχείο σ ανήκει στο σύνολο Α*», (και: *«... σύνολο Β»,* και *«... σύνολο Γ»* αντιστοίχως).

1. Χρησιμοποιείστε τις και τους συνδέσμους  για να γράψετε δύο προτάσεις  και  που να εκφράζουν ότι το στοιχείο *σ* ανήκει (αντιστοίχως) στα σύνολα  και , και δείξτε με τους νόμους/ισοδυναμίες των σελ. 38-40, ότι είναι ταυτολογικά ισοδύναμες: .
2. Γράψτε δύο προτάσεις και που να εκφράζουν ότι το στοιχείο *σ* ανήκει (αντιστοίχως) στα σύνολα  και , και δείξτε παρομοίως ότι είναι ταυτολογικά ισοδύναμες.

**2.α: ενδεικτικεσ απαντησεισ**

Η κρίσιμη παρατήρηση εδώ είναι ότι για την πράξη *Α–Β* μεταξύ συνόλων έχουμε «*σ* *Α*–*Β*» ≡ (*ασ*  ∧ ¬*βσ*) *.*

**2.Α.1.** Το  εκφράζεται ως *Φσ* ≡ (*ασ* ∨ *βσ*) ∧ ¬*γσ*­­ . Το  εκφράζεται   
ως *Φ'σ* ≡ (*ασ* ∧ ¬*γσ*) ∨ (*βσ* ∧ ¬*γσ*). Οι προτάσεις *Φσ* και *Φ'σ* είναι ταυτολογικά ισοδύναμες καθώς η μία μπορεί να προκύψει από την άλλη με χρήση του νόμου της επιμεριστικότητας ( ∧ επί ∨ ):

(*ασ* ∨ *βσ*) ∧ ¬*γσ* ≡ (*ασ* ∧ ¬*γσ*) ∨ (*βσ* ∧ ¬*γσ*) .

**2.Α.2.** Το  εκφράζεται ως *Ψσ* ≡ (*ασ* ∨ *βσ*) ∧ ¬(*ασ* ∧ *βσ*). Το εκφράζεται ως *Ψ'σ* ≡ (*ασ* ∧ ¬*βσ*) ∨ ( *βσ*∧¬*ασ*) . Η ταυτολογική ισοδυναμία *Ψσ* ≡ *Ψ'σ* διαπιστώνεται ως εξής:

(*ασ* ∧ ¬*βσ*) ∨ ( *βσ*  ∧¬*ασ*)

με νόμο επιμεριστικότητας ≡ ((*ασ* ∧ ¬*βσ*) ∨ *βσ*) ∧ ((*ασ* ∧ ¬*βσ*) ∨ ¬*ασ*)

με νόμο επιμεριστικότητας ≡ ((*ασ* ∨ *βσ*) ∧ (¬*βσ* ∨ *βσ*)) ∧ ((*ασ* ∨ ¬*ασ*) ∧ (¬*βσ* ∨ ¬*ασ*))

με νόμο αποκλεισμού τρίτου ≡ (*ασ* ∨ *βσ*) ∧ (¬*βσ* ∨ ¬*ασ*)

με νόμο *De Morgan* ≡ (*ασ* ∨ *βσ*) ∧ ¬ (*βσ* ∧ *ασ*)

με νόμο αντιμεταθετικότητας ≡ (*ασ* ∨ *βσ*) ∧ ¬ (*ασ* ∧ *βσ*)

**Β.**  Μια ομάδα 8 επαγγελματιών  πρέπει να εκλέξει τουλάχιστον 3 εκπρόσω­πους για το επαγγελματικό τους συνέδριο. Η συγκυρία στο κλάδο τους επιφέρει όμως κάποιες περιοριστικές συνθήκες που εκφράζονται ως εξής – (όπου η κάθε μεταβλητή ‘*Χ*’ ερμηνεύεται ως «*ο κος/κα Χ θα οριστεί εκπρόσωπος*»):

(*i*) .

(*ii*) .

(*iii*) .

(*iv*) .

1. Γράψτε την ερμηνεία των παραπάνω τύπων στη καθημερινή μας γλώσσα. (Εννοούμε εδώ μια *φυσική*, κατά το δυνατόν, απόδοση, και όχι την «απαγγελία» των τύπων: π.χ. για το  προτιμούμε την απόδοση «*είναι* *αδύνατον τα Α, Β, Γ να αληθεύουν από κοινού*», αντί της «*όχι και Α και Β και Γ*» .)
2. Υπό το φως των παραπάνω ερμηνειών διαπιστώστε, και εξηγείστε, αν είναι τελικά δυνατόν να βρεθούν τουλάχιστον 3 εκπρόσωποι, ώστε να τηρούνται οι παραπάνω περιορισμοί (*i*), (*ii*), (*iii*), (*iv*).

**2.B: ενδεικτικεσ απαντησεισ**

**2.Β.1.** Η ερμηνεία των παραπάνω τύπων είναι η ακόλουθη:

(*i*) «Κάθε ομάδα (των «Α», των «Β», και των «Γ») πρέπει να στείλει από έναν τουλάχιστον εκπρόσωπο.»

(*ii*) «Οι εκπρόσωποι  ή θα σταλούν όλοι μαζί ή κανένας.»

(*iii*) «Από τους  ένας το πολύ θα σταλεί εκπρόσωπος.»

(*iv*) «Ο μπορεί να εκλεγεί μόνον εάν δεν εκλεγεί ο .», ή: «Αν πάει ο , τότε ο  δεν θα πάει.»

**2.Β.2.** Η ερμηνεία εκ του 2.Β.1. είναι απεικονίσιμη όπως παρακάτω:



* Αφού από τους θα πάνε ή όλοι ή κανένας, και από τους  μπορεί να πάει μόνον ένας το πολύ, τότε από τους  δεν μπορεί να πάει κανένας.
* Αφού από τις  και  ομάδες θα πρέπει να πάει από ένας τουλάχιστον, και οι  έχουν αποκλειστεί, επιβάλλεται η επιλογή των  και .
* Αφού από τους «Α» πρέπει να πάει τουλάχιστον ένας, ενώ ο μεν έχει αποκλειστεί, η δε παρουσία του  θα απέκλειε την μοναδική μας επιλογή  για τους «Β», η μόνη επιλογή που μένει είναι ο .

Δηλαδή, τελικά υπάρχει μια (μοναδική) εκπροσώπηση που τηρεί τις συνθήκες: οι εκπρόσωποι .

1. **Τυπικές αποδείξεις. (5 + 15 μονάδες)**

*Το ερώτημα* **3.A** *ελέγχει την ικανότητα της αποτύπωσης ενός ζητήματος σε μια γλώσσα με συνδέσμους τους* 

*Το ερώτημα* **3.B** *ελέγχει την ικανότητα σχεδίασης μιας τυπικής απόδειξης με χρήση των σχετικών θεωρημάτων.*

**συνοδευτικές ασκήσεις παλαιότερων ετών: (Α: θεμα #2), (Β: θεμα #10).**

Μια παρέα πέντε προσώπων εξετάζει το ενδεχόμενο μιας εκδρομής τους. Οι περιστάσεις όμως μεταξύ τους προκαλούν τις εξής συνθήκες συμμετοχής σε αυτήν:

*Ο Ανδρέας ίσως να συμμετάσχει, αλλά μόνον αν απουσιάσει είτε ο Γιάννης είτε η Δήμητρα· η Ευαγγελία ίσως να συμμετάσχει, αλλά μόνον αν έλθει ο Ανδρέας και δεν έλθει η Βασιλική· και, αν δεν συμμετάσχει ούτε η Βασιλική ούτε ο Γιάννης, τότε δεν θα πάει ούτε η Δήμητρα*.

**Α.**  Εξηγείστε γιατί οι παραπάνω συνθήκες εκφράζονται από το εξής σύνολο προτασιακών τύπων, όπου η κάθε μεταβλητή *‘Χ’* ερμηνεύεται ως «*το πρόσωπο με αρχικό ονόματος το Χ συμμετείχε* *στην εκδρομή*»:

Υ = 

**3.Α: ενδεικτική απαντηση**

Απαριθμούμε τους προτασιακούς τύπους:

*Υ*1 ≡ *Γ* → (*Δ* → ¬*Α*), *Υ*2 ≡ *Ε* → *Α* , *Υ*3 ≡ *Ε* → ¬*Β*, και *Υ*4 ≡ ¬*Γ* → (¬*Β* → ¬*Δ*),

Κάθε μία από τις περιστάσεις που περιγράφονται λεκτικά μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν ή περισσότερους από τους παραπάνω προτασιακούς τύπους:

«*Ο Ανδρέας ίσως να συμμετάσχει, αλλά μόνον αν απουσιάσει είτε ο Γιάννης είτε η Δήμητρα·*»

Η περίσταση αυτή περιγράφεται από τον *Υ*1ο οποίος εάν ο Γιάννης απουσιάσει, επαληθεύεται οτιδήποτε κι αν κάνει ο Ανδρέας, αλλά και αν η Δήμητρα απουσιάσει και πάλι επαληθεύεται ό,τι κι αν κάνει ο Ανδρέας. Επίσης, αν ο *και* ο Γιάννης *και* η Δήμητρα παραστούν τότε ο *Υ*1 επιβάλλει την απουσία του Ανδρέα.

«*Η Ευαγγελία ίσως να συμμετάσχει, αλλά μόνον αν έλθει ο Ανδρέας και δεν έλθει η Βασιλική·*»

Η περίσταση αυτή περιγράφεται από τον *Υ*2και τον *Υ*3. Ο *Υ*2 επαληθεύεται με την Ευαγγελία να συμμετέχει μόνο εάν συμμετάσχει και ο Ανδρέας και ο *Υ*3 επαληθεύεται με την Ευαγγελία να συμμετέχει μόνο εάν δεν συμμετάσχει η Βασιλική.

«*Αν δεν συμμετάσχει ούτε η Βασιλική ούτε ο Γιάννης, τότε δεν θα πάει ούτε η Δήμητρα*.»

Η περίσταση αυτή περιγράφεται από τον *Υ*4,ο οποίος εάν *και* ο Γιάννης δεν συμμετάσχει *και* η Βασιλική δεν συμμετάσχει, επαληθεύεται αν και μόνον αν *δεν* συμμετάσχει η Δήμητρα.

**Β.**  Μετά την εκδρομή ο Ζαχαρίας, *βλέποντας την Δήμητρα σε μια φωτογραφία από αυτήν*, σχολίασε:   
«*απ’ ότι βλέπω, η... Ευαγγελία δεν ήταν στην εκδρομή*». Περιγράψτε, (με χρήση του *modus* *ponens* και των θεωρημάτων 2.8, 2.9, 2.10 στις σελ. 58-62), μια τυπική απόδειξη που να δικαιολογεί τον συλλογισμό του Ζαχαρία.

***Υπόδειξη***: προσέξτε ότι για να προκύψουν συμπεράσματα από τις υποθετικές προτάσεις,   
θα πρέπει τα *Γ*, ¬*Γ*, *Δ*, *Ε* να βρεθούν σε κάποιες φάσεις της απόδειξης «αριστερά του |–πλ ».

**3.B:** ενδεικτική απαντηση

Από τις υποθέσεις *Υ* = {*Υ*1, *Υ*2, *Υ*3, *Υ*4} είναι δυνατή μια απόδειξη *Υ* |–πλ ( *Δ*→ ¬*Ε* ) = «*αν πήγε η Δήμητρα τότε δεν πήγε η Ευαγγελία*». Αυτό εξηγείται στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις εξής πρόσθετες υποθέσεις:

* το *Δ* (ως παρατήρηση)·
* το *Ε* (ως υπόθεση από την οποία περιμένουμε να προκύψει άτοπο)·
* τα *Γ* και ¬*Γ*, *σε δύο φάσεις*, (δηλαδή «*εάν πήγε ο Γιάννης, τότε ...*»*,* και«*αν πάλι, δεν πήγε, τότε ...*»).

Οι αποδείξεις ότι από τα *Δ* και *Ε* προκύπτει κάποια αντίφαση, είτε ισχύει η *Γ* είτε όχι, έχουν ως εξής:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. | *Γ* → (*Δ* → **¬*Α***) | υπόθεση Υ1 |  | 1. | *Γ* → (*Δ* → ¬*Α*) | υπόθεση Υ1 |
| 2. | *Ε* → ***Α*** | υπόθεση Υ2 |  | 2. | *Ε* → *Α* | υπόθεση Υ2 |
| 3. | *Ε* → ¬*Β* | υπόθεση Υ3 |  | 3. | *Ε* → ¬*Β* | υπόθεση Υ3 |
| 4. | ¬*Γ* → (¬*Β* → ¬*Δ*) | υπόθεση Υ4 |  | 4. | ¬*Γ* → (¬*Β* → **¬*Δ***) | υπόθεση Υ4 |
| 5. | *Δ* | πρόσθετη υπόθεση |  | 5. | ***Δ*** | πρόσθετη υπόθεση |
| 6. | *Ε* | πρόσθετη υπόθεση |  | 6. | *Ε* | πρόσθετη υπόθεση |
| 7. | *Γ* | πρόσθετη υπόθεση «Γ» |  | 7. | ¬*Γ* | πρόσθετη υπόθεση «¬Γ» |
| 8. | (*Δ* → ¬*Α*) | από (7, 1) με *m.p.* |  | 8. | ¬*Β* | από (6, 3) με *m.p.* |
| 9. | **¬*Α*** | από (5, 8) με *m.p.* |  | 9. | (¬*Β* → ¬*Δ*) | από (7, 4) με *m.p.* |
| 10. | ***Α*** | από (6, 2) με *m.p.* |  | 10. | **¬*Δ*** | από (8, 9) με *m.p.* |
|  |  |  |  | 11. | ***Δ*** | από (5) (υπόθεση) |

Με χρήση των θεωρημάτων 2.8, 2.9, 2.10, οι «βοηθητικές» υποθέσεις *Δ*, *Ε*, *Γ*, ¬*Γ,* είτε *μεταφέρονται* στο συμπέρασμα δεξιά του |–πλ, είτε *απαλείφονται*, αφήνοντας μία απόδειξη με αφετηρία τις υποθέσεις *Υ* :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | *Οι εξής αποδείξεις είναι εφικτές:* | *Εξήγηση:* |
| μεταφορά *Ε* | 1. | *Υ*, *Δ*, *Γ* |–πλ **¬*Ε*** | από αριστερή στήλη με θ. απαγωγήσ σε άτοπο. |
| 2. | *Υ*, *Δ*, ¬*Γ* |–πλ **¬*Ε*** | από δεξιά στήλη με θ. απαγωγήσ σε άτοπο. |
| απαλειφή *Γ*, ¬*Γ* | 3. | *Υ*, *Δ*, ***Ε*** |–πλ **(¬*Γ*)** | από (1) με θ. αντιθετοαντιστροφησ. |
| 4. | *Υ*, *Δ*, ***Ε*** |–πλ **¬(¬*Γ*)** | από (2) με θ. αντιθετοαντιστροφησ. |
| 5. | *Υ*, *Δ* |–πλ **¬*Ε*** | από (3, 4) με θ. απαγωγήσ σε άτοπο. |
| μεταφορά *Δ* | 6. | *Υ* |–πλ **(*Δ* → ¬*Ε*)** | από (5) με θ. απαγωγήσ. |

Το 6ο ήταν σε θέση να συμπεράνει τυπικά ο Ζαχαρίας γνωρίζοντας την κατάσταση ***Υ*** της παρέας, ακόμα και *πριν* δει την Δήμητρα στην φωτογραφία. Γνωρίζοντας **(*Δ*→ ¬*Ε*)** (από ***Υ*** και θ. εγκυρότητας), και ***Δ*** (από τη φωτογραφία), μπορεί να διαπιστώσει (‘*modus ponens*’) ότι **¬*Ε*** ≡ «*η Ευαγγελία δεν πήγε στην εκδρομή*».

1. **Ικανοποιησιμότητα (επαληθευσιμότητα). (15 + 15 μονάδες)**

*Το κεντρικό ζήτημα στην προτασιακή λογική είναι η διάγνωση της ικανοποιησιμότητας (ή επαληθευσιμότητας) ενός συνόλου τύπων. Αυτό μπορεί, ως γνωστόν, να γίνει αν καταστρώσουμε ένα πίνακα αληθείας, αλλά αυτός για n μεταβλητές θα περιέχει* 2*n* *γραμμές, πλήθος ανέφικτο για «μεγάλα» n, π.χ. n* >60*. Στην έως τώρα ιστορία των μαθηματικών όμως, δεν έχει βρεθεί καλύτερος αλγόριθμος. Ίσως να μην υπάρχει... και ως εκ τούτου, η έρευνα εστιάζεται σε ειδικές περιπτώσεις.   
Στα* **4.A***,* **4.B** *εκδιπλώνεται η λύση μιας τέτοιας ειδικής περίπτωσης,* (*με κωδική ονομασία* **2sat**)*. Η ουσία εδώ ευρίσκεται στην κατανόηση των όρων/εννοιών που δίδονται στην εισαγωγή του ερωτήματος.*

**συνοδευτικές ασκήσεις παλαιότερων ετών: (Α, Β, Γ: θεμα #8).**

Έστω *n* προτασιακές μεταβλητές . Για τους σκοπούς του ερωτήματος θα χρησιμοποιήσουμε την εξής (περιστασιακή) φρασεολογία, όπου τα *Τ* και *Τ*΄ είναι σύνολα τύπων:

|  |  |
| --- | --- |
| *Φράση:* | *Ερμηνεία:* |
| *μονόλεκτο* : | Ο τύπος  ή ο τύπος . (Στη 2η περίπτωση θεωρούμε ως  το .) |
| *δίλεκτο* : | Τύπος με έναν λογικό σύνδεσμο, , που συνδέει 2 μονόλεκτα. |
| *Τ* είναι *αντιστρεπτό* : | Αν περιέχει το όποιο δίλεκτο, τότε περιέχει και το . |
| *Τ*  είναι  *μεταβατικό* : | Αν περιέχει τα όποια () και (), τότε περιέχει και το (). |
| *Τ*΄ είναι *επέκταση* του *Τ* : | Ισχύει ότι (*Τ* *Τ*΄) και (*Τ* = ικανοποιήσιμο ⇒ *Τ*΄= ικανοποιήσιμο). |
| *Τ* *εκτιμά* την: | Το *Τ* περιέχει είτε το (), είτε το (), είτε και τα δύο. |
| *Τ* είναι *πλήρες* : | Για κάθε το *Τ* περιέχει *ένα* *τουλάχιστον* από τα (), (). |
| *Τ* είναι *έγκυρο* : | Για κάθε το *Τ* περιέχει *ένα* *το πολύ* από τα (), (). |

Δεδομένου ενός συνόλου *S* από μονόλεκτα ή/και δίλεκτα, ορίζουμε την διαδικασία πληρεσ(*s*) ως εξής:

[1] Θεωρούμε ότι το *S* περιέχει μόνον δίλεκτα της μορφής , και θέτουμε *S*’=*S*.

[2] Για κάθε τύπο  του *S*’ προσθέτουμε το αντιθετοαντίστροφο  στο *S*’.

[3] Εάν στο *S*’ υπάρχουν κάποια  και  αλλά όχι το ,

τότε: (3.α) προσθέτουμε το  στο *S*’, (3.β) επαναλαμβάνουμε τον έλεγχο [3].

**Α.**  Δείξατε τα εξής:

1. Το βήμα [1] είναι εφικτό χωρίς απώλεια γενικότητας, και το βήμα [3] θα τερματίζει πάντοτε.
2. Το παραγόμενο σύνολο *S΄*= πληρεσ(*S*) αποτελεί *επέκταση* του *S* και μάλιστα *αντιστρεπτή* & *μεταβατική.*

**4.Α: ενδεικτικεσ απαντησεισ**

**4.Α.1.** Δείχνουμε κατ’ αρχάς ότι το βήμα [1] δεν αποτελεί απώλεια γενικότητας, δηλαδή, ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε τους τύπους του *S* με δίλεκτα σε μορφή συνεπαγωγής, και να λάβουμε ένα νέο σύνολο τύπων *λογικά ισοδύναμο* με το αρχικό, (δηλαδή το ένα επαληθεύεται εάν και μόνον επαληθεύεται το άλλο):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Αντί του τύπου:* | *χρησιμοποιούμε στο S το/τα:* | *που είναι λογικά ισοδύναμο, διότι*: |
| *Xα*­ | (¬*Χα* → *Χα*) | επιβάλλει *Χα* = αληθες. |
| ¬*Χα* | (*Χα* → ¬*Χα*) | επιβάλλει *Χα* = ψευδες. |
| *Lα* ∨ *Lβ* | (¬*Lα* → *Lβ*) | ισχύει ο νόμος αντικατάστασης. |
| *Lα* ∧ *Lβ* | (¬*Lα* → *Lα*)  (¬*Lβ* → *Lβ*) | επιβάλλει και το *Lα* και το *Lβ* . |
| *Lα* → *Lβ* | (*Lα* → *Lβ* ) | μένει ως έχει. |

Προσέχουμε στα παραπάνω ότι η άρνηση του ¬*Lα* «απορροφάται» από την αντίστοιχη μεταβλητή: αν *Lα* είναι το *Xα*­, τότε ¬*Lα* είναι το ¬*Xα*­, ενώ αν *Lα* είναι το ¬*Xα*­, τότε ¬*Lα* είναι το *Xα*­. Άρα το ¬*Lα* μπορεί να θεωρηθεί ως μονόλεκτο. Επομένως το *S* μπορεί να θεωρηθεί, χωρίς απώλεια γενικότητας, ως μια συλλογή δίλεκτων τύπων σε μορφή συνεπαγωγής.

Για το βήμα [3], αρκεί να παρατηρήσουμε ότι εφόσον ένα δίλεκτο δεν προστίθεται στο *S'* αν ήδη υπάρχει σε αυτό, το βήμα αυτό θα εκτελεστεί το πολύ τόσες φορές όσες και τα δίλεκτα που μπορούν να προκύψουν μεταξύ όλων των μονόλεκτων του *S*. Το πλήθος αυτών είναι πεπερασμένο, διότι αν έχουμε *n* μεταβλητές τότε έχουμε 2*n* μονόλεκτα (λόγω των αρνήσεων, αλλά και της απλοποίησης του  σε ), και άρα τα δίλεκτα είναι το πολύ 2*n* 2*n*. Επομένως το βήμα [3] επαναλαμβάνεται το πολύ 4*n*2 φορές.

**4.Α.2.** Κατά το βήμα [2] το *S'*  *παραμένει* *διαρκώς* *επέκταση* του δεδομένου *S*, διότι αν μια αποτίμηση επαληθεύει ένα δίλεκτο *Lα* → *Lβ* του *S΄*, τότε επαληθεύει και το προστιθέμενο ¬*Lβ* → ¬*Lα* (αντιθετοαντιστροφή).

Κατά το βήμα [3], η προσθήκη στο *S'*  του *Lα* → *Lγ*  για κάποια *Lα* → *Lβ* και *Lβ* → *Lγ* του *S΄*, επίσης *επεκτείνει* το *S΄* (άρα και το *S* ), διότι κάθε αποτίμηση που επαληθεύει τα *Lα* → *Lβ* και *Lβ* → *Lγ* επαληθεύει και το *Lα* → *Lγ*, όπως δείχνει ο παρακάτω πίνακα αληθείας:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***Lα*** | ***Lβ*** | ***Lγ*** | ***Lα* → *Lβ*** | ***Lβ* → *Lγ*** | ***Lα* → *Lγ*** |
| Α | Α | Α | Α | Α | Α |
| Α | Α | Ψ | Α | Ψ | Ψ |
| Α | Ψ | Α | Ψ | Α | Α |
| Α | Ψ | Ψ | Ψ | Α | Ψ |
| Ψ | Α | Α | Α | Α | Α |
| Ψ | Α | Ψ | Α | Ψ | Α |
| Ψ | Ψ | Α | Α | Α | Α |
| Ψ | Ψ | Ψ | Α | Α | Α |

Επίσης, το *S΄* παραμένει *και* *αντιστρεπτό*, διότι ήταν ήδη, δηλαδή περιέχοντας τα *Lα* → *Lβ*  και *Lβ* → *Lγ*, περιείχε και τα αντιθετοαντίστροφα, ¬*Lγ* → ¬*Lβ* , ¬*Lβ* →¬ *Lα*· άρα ο ίδιος έλεγχος στο βήμα [3] θα προσθέσει τόσο το «καινούργιο» *Lα* → *Lγ* όσο το αντιθετοαντίστροφό του ¬*Lγ* → ¬*Lα*.

Άρα στο (*αναπόφευκτο*, βλ. 4.Α.1) τέλος της διαδικασίας, το *S΄* θα έχει παραμείνει και *επέκταση* του *S*, και *αντιστρεπτό*, αλλά θα έχει καταστεί και *μεταβατικό –* αλλιώς το βήμα [3] δεν θα είχε σταματήσει.

**B.**  Δείξατε ότι αν το  είναι *πλήρες*, τότε το αφετηριακό σύνολο *S* είναι ικανοποιήσιμο εάν και μόνον εάν το  είναι *έγκυρο*.

***Υπόδειξη***: για το **Β** αξιοποιείστε το **Α.2**: *S*΄ = αντιστρεπτή και μεταβατική επέκταση του *S*.  
(Χάριν του θέματος, αναφέρουμε ότι το *S*΄, ακόμα και όταν δεν είναι πλήρες, είναι δυνατόν να καταστεί σταδιακά πλήρες, και άρα να διαπιστωθεί τελικά εάν το *S* είναι ικανοποιήσιμο ή όχι.)

**4.β: ενδεικτικη απαντηση**

Υπό την υπόθεση ότι «*S*΄ = *πλήρες*», έχουμε δύο «κατευθύνσεις» συνεπαγωγής να δείξουμε:

1η *κατεύθυνση: «αν S' = έγκυρο, τότε S = ικανοποιήσιμο»:*

Το *S΄*, ως πλήρες, περιέχει για κάθε μεταβλητή *Χk* είτε το ¬*Χk* → *Xk*, είτε το *Xk* → ¬*Xk* . Στη 1η περίπτωση αποτιμούμε *Χk* = αληθες, και στη 2η, *Χk* = ψευδες. Έτσι για κάθε μονόλεκτο *L* θα έχουμε *L* = αληθεσ ή ψευδες, ανάλογα με το εάν το *S΄* περιέχει το ¬*L* → *L*, ή το *L* → ¬*L*. Επειδή το *S*΄ είναι έγκυρο, δεν θα περιέχει ποτέ και τα δύο, άρα αυτή η αποτίμηση είναι εφικτή.

Υπό αυτή την αποτίμηση επαληθεύονται όλοι οι τύποι *Lα* → *Lβ*  του *S΄*, διότι για να υπάρξει (*Lα* → *Lβ*) = ψευδεσ, πρέπει να έχει αποτιμηθεί *La* = αληθεσ και *Lβ* = ψευδες.



Τότε όμως θα έπρεπε να υπάρχουν όλοι οι εξής τύποι στο *S΄,* (εικονιζόμενοι με βελάκια στο σχετικό επεξηγηματικό σχήμα),

(1) *Lα* → *Lβ*, (2) *Lβ* → ¬*Lβ*, (3) ¬*Lβ* → ¬*Lα*, (4) *Lα* → ¬*Lα*, (5) ¬*Lα* → *Lα*,

ενώ κάτι τέτοιο οδηγεί σε άτοπο: από τα (4) και (5) το έγκυρο *S*΄ μπορεί να περιέχει μόνον ένα.

Αφού όλοι οι τύποι στο *S΄* επαληθεύονται, επαληθεύονται και όλοι στο *S*, αφού το *S΄* *επεκτείνει* το *S*: *S* *S΄*.

*2η κατεύθυνση: «Αν S' = μη-έγκυρο, τότε S = μη-ικανοποιήσιμο».*

Αν το *S΄* είναι μη-έγκυρο τότε για κάποια μεταβλητή *Χk* περιέχει και το ¬*Χk* → *Xk* και το *Xk* → ¬*Xk*, δηλαδή είναι μη-ικανοποιήσιμο, αφού αυτά επιβάλλουν το άτοπο *Χk* = αληθες και *Χk* = ψευδες. Αφού το *S΄* δεν είναι ικανοποιήσιμo, ούτε το *S* είναι: αν το *S* ήταν ικανοποιήσιμο θα ήταν και το *S΄* ως *επέκταση* του *S*.

1. **«Χωρίς χαρτί & μολύβι». (8 + 8 μονάδες)**

*Έχουμε εδώ μια εισαγωγή στην εξέταση με ερωτήματα πολλαπλών επιλογών – εδώ απλώς διλήμματα* σωστο/λαθος*.   
Τα ερωτήματα είναι αρκετά απλά ώστε να μπορούν να απαντηθούν γρήγορα, και, ίσως, χωρίς χαρτί και μολύβι. Είναι σημαντικό να προσπαθήσετε να τα απαντήσετε σε σύντομο χρόνο – π.χ. σε λίγα λεπτά ανά ερώτημα κατά μέσον όρο.*

***προσοχή****: μην παραλείψετε να δώσετε μια σύντομη εξήγηση σε κάθε απάντηση· υπάρχει πάντα μία των ολίγων γραμμών.*

**συνοδευτικές ασκήσεις παλαιότερων ετών: (Α: θεμα #11), (Β: θεμα #8).**

**Α.**  Απαντείστε με σωστό/λάθος αν οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι αληθείς ή όχι, (όπου τα κεφαλαία σύμβολα δηλώνουν προτασιακούς τύπους):

1. **(Σ/Λ)** «Αν ο *Φ* ∨ *Ψ* είναι ταυτολογία, τότε ¬*Φ* |–πλ *Ψ* ».
2. **(Σ/Λ)** «Αν  *Φ* |= *Ψ* και όχι *Φ |–*πλ *Ψ*, τότε ο *Ψ* είναι αντίφαση».
3. **(Σ/Λ) «**Αν  |= *Σ* και  |= *Σ* , τότε  |–πλ *Σ* ».
4. **(Σ/Λ)** Θα αποκαλούμε μια υπόθεση *Υk* *κρίσιμη* (ως προς *Σ*) εάν  (¬*Υk* |= ¬*Σ*)·  και θα αποκαλούμε   
   την *Υk* *ανεξάρτητη* (από τις υπόλοιπες*Υ* = { *Υ*­­1, ..., *Υk*, ..., *Υn* }) εάν  *δεν* ισχύει (*Υ* –{ *Υk* } |= *Υk*).   
   Ισχυρισμός: «*δεν μπορεί από το Υ να προκύψει μια τυπική απόδειξη του Σ, αν μείνει αχρησιμο­ποίητη έστω και μία κρίσιμη ανεξάρτητη υπόθεση* *Υk*».

**5.Α:** ενδεικτικεσ απαντησεισ

1. **σωστο** Αν ο *Φ* ∨ *Ψ* είναι ταυτολογία, τότε κάθε αποτίμηση που διαψεύδει το *Φ* πρέπει να επαληθεύει το *Ψ*, άρα ¬*Φ* |= *Ψ*, και από θ. πληρότητας πρέπει ¬*Φ* |–πλ *Ψ* .
2. **σωστο** Από θ. πληρότητας η υπόθεση «αν  *Φ* |= *Ψ* και όχι *Φ |–*πλ *Ψ*» είναι πάντοτε ψευδης, και μια συνεπαγωγή με ψευδή υπόθεση είναι πάντοτε αληθης.
3. **σωστο** Κάθε αποτίμηση που επαληθεύει το  επαληθεύει τα  και , οπότε και στις δύο περιπτώσεις (είτε *Α*= αληθες, είτε ο ¬*Α*= αληθες), θα επαληθεύεται το *Σ*. Άρα θα έχουμε |= *Σ* και από θ. πληρότητας, |–πλ *Σ* .
4. **σωστο** Αφού η *Υk* είναι *ανεξάρτητη* υπάρχει αποτίμηση *α*(-) των μεταβλητών που ικανο­ποιεί τις   
   *Υ* –{ *Υk* } και την ¬*Υk* . Αν υπήρχε απόδειξη *Υ* –{ *Υk* } |–πλ *Σ* τότε για την *α*(-) θα είχαμε και *Σ*= αληθες (από *εγκυρότητα* |–πλ), και ¬*Σ*= αληθες (από *κρισιμότητα Υk*), πράγμα άτοπο.

**Β.**  Απαντείστε με Σ/Λ αν οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι αληθείς ή όχι, (όπου τα  είναι προτασιακές μεταβλητές):

1. **(Σ/Λ)** Αν το , , είναι ικανοποιήσιμο, τότε για οποιοδήποτε  είναι ικανοποιήσιμο και το .

(διευκρίνιση: υπό την ιδία αποτίμηση των *Xj*.)

1. **(Σ/Λ)** Αν για κάποιο *k*, , το  είναι ικανοποιήσιμο, τότε και ο τύπος  είναι ικανοποιήσιμος.

(διευκρίνιση: υπό την ιδία αποτίμηση των *Xj*.)

1. **(Σ/Λ)** Υπάρχουν τρία δίλεκτα  επί των προτασιακών μεταβλητών ,, [για τον ορισμό του ‘*δίλεκτου’* βλ. Ερώτημα 4], τέτοια ώστε .
2. **(Σ/Λ)** Έστω ότι το σύνολο *S* περιέχει μόνον τύπους της μορφής , όπου τα  είναι κάποιες από τις μεταβλητές , , και ότι το  είναι   
   είτε το είτε το , . Τότε, το *S* είναι πάντοτε ικανοποιήσιμο.

**5.Β:** ενδεικτικεσ απαντησεισ

1. **σωστο** Η αποτίμηση που ικανοποιεί το  θα πρέπει να καθιστά αληθές ένα τουλάχιστον *Χj*, . Αν  τότε επιλέγοντας, ¬*Β* = αληθες, ικανοποιούνται και οι δύο τύποι που δίδονται· αν  τότε, παρομοίως, επιλέγουμε, *Β* = αληθες.
2. **σωστο** Αν για μια αποτίμηση ικανοποιούνται και οι δύο τύποι, τότε αν *Β* = ψευδες, πρέπει να αλη­θεύει ένα των , και αν ¬*Β* = ψευδες, πρέπει να αληθεύει ένα των , άρα ένα τουλάχιστον *Χj*, , αληθεύει, άρα και το .
3. **λαθοσ** Στον πίνακα αληθείας του, το  περιέχει **7** «Α» και **1** «Ψ». Άρα κάποιο από τα *Δj*  θα πρέπει να έχει «Ψ» στη στήλη του, άρα *δύο* «Ψ» τουλάχιστον, επειδή είναι δίλεκτο και κάποιο  λείπει. Άρα το  θα έχει δύο τουλάχιστον «Ψ» και όχι ακριβώς ένα.
4. **σωστο** Αρκεί να αποτιμήσουμε όλες τις μεταβλητές ως ψευδεις: τότε οι τιμές αληθείας των  στο «δεξιό μέρος» των συνεπαγωγών δεν θα έχουν κανένα αντίκτυπο.

1. () *Όλες οι παραπομπές είναι στο Τόμο Γ΄ περί* μαθηματικής λογικής*.* [↑](#footnote-ref-1)